

Neumann-Funktion

- a) Die Neumannsche Funktion $N = N(x, y)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird definiert wie die Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem mit dem Unterschied, dass die Bedingung $G(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega, y \in \Omega$ ersetzt wird durch $\frac{\partial N}{\partial n}(x, y) = const.$ für $x \in \partial\Omega, y \in \Omega$. Formulieren und beweisen Sie mit Hilfe der 2. Greenschen Formel eine Darstellung für die Lösung des Neumann-Problems mit Hilfe der Neumannschen Funktion. Inwieweit ist die Konstante bestimmt?
- b) Lösen Sie das Neumann-Problem für eine Kugel im \mathbb{R}^3 . Gegeben ist eine Funktion $h : \partial B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{\partial B_r(0)} h(x) d\sigma_x = 0$. Gesucht ist eine Darstellung (z. B. mittels a)) der Lösung $u = u(x)$ von

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{in } B_R(0) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h \quad \text{in } \partial B_R(0).\end{aligned}$$